| C01 | Théorème de la progression arithmétique | L102 L121 L104 L207 L107 L241 L110 L245 L120 |
|---|---|---|

**Th :** Soit $D \geqslant 2$ et $G = (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^\times$. On pose $\forall \chi \in \hat{G}$, $\forall s \in \Omega_1$, $L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$

① $s \mapsto L(1_D, s)$ se prolonge en une f° holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, avec un pôle simple en $s=1$

② Si $\chi \neq 1_D$, on a : $\sigma_{hol} = -\infty$ ; $\sigma_{conv} = 0$ et $L(\chi, 1) \neq 0$.

Démonstration : ① $L(1_D, \cdot)$ est à coefficients positifs donc d'après le th de Landau, $\sigma_{hol} = \sigma_{conv} = \sigma_{abs} = 1$.

De plus, $\forall s \in \Omega_1$, $L(1_D, s) = \prod_{p \nmid D} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \zeta(s) . \prod_{p \mid D} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$

Ainsi, $L(1_D, \cdot)$ se prolonge, comme $\zeta$ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$,

et $(s-1) L(1_D, s) = (s-1)\zeta(s) . \frac{1}{D} . D . \prod_{p \mid D} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \xrightarrow[s \to 1]{} \text{Res}(\zeta, 1) . \frac{\varphi(D)}{D} = \frac{\varphi(D)}{D}$.

② Soit $\chi \in \hat{G} \setminus \{1_D\}$, par orthogonalité avec le caractère principal,

$0 = \langle 1_D, \chi \rangle = \frac{1}{\varphi(D)} . \sum_{x \in G} \overline{1_D(x)} . \chi(x) \iff \sum_{x \in G} \chi(x) = 0 \iff \sum_{n = kD+1}^{(k+1)D} \chi(n) = 0$

D'où $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{n=1}^{N} \chi(n) \right| \leqslant \sum_{n = \lfloor \frac{N}{D} \rfloor + 1}^{N} |\chi(n)| \leqslant D$ : $\chi$ est de primitive bornée,

Par une transformation d'Abel, on trouve $\sigma_{conv} = 0$ et $\sigma_{hol} = -\infty$

③ On a $\forall s \in \Omega_1$, $F(s) := \prod_{\chi \in \hat{G}} L(\chi, s) = \prod_{p \nmid D} \prod_{\chi \in \hat{G}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$.

On fixe $p \nmid D$. On a $ev_p : \begin{array}{l} \hat{G} \to \mathbb{C}^* \\ \chi \mapsto \chi(p) \end{array}$ est un morphisme de groupes

ainsi, $\exists ! \, d_p \in \mathbb{N}^*$ tq $\text{Im}(ev_p) = \mathbb{U}_{d_p}$ et $\exists h_p \in \mathbb{N}$ tq $|\text{Ker}(ev_p)| = h_p$.

De plus, par le th d'isomorphisme, $\forall \xi \in \mathbb{U}_{d_p}$, $\exists h_p$ élmts de $\hat{G}$ tq $\chi(p) = \xi$.

D'où $\prod_{\chi \in \hat{G}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \prod_{\xi \in \mathbb{U}_{d_p}} \left(1 - \frac{\xi}{p^s}\right)^{h_p} = \left( \prod_{\xi \in \mathbb{U}_{d_p}} \left(1 - \xi . \frac{1}{p^s}\right) \right)^{h_p} = \left(1 - \frac{1}{p^{d_p s}}\right)^{h_p}$

d'où $F(s) = \prod_{p \nmid D} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{d_p s}}} \right)^{h_p} = \prod_{p \nmid D} \left( \sum_{\alpha = 0}^{\infty} \frac{1}{p^{d_p \alpha s}} \right)^{h_p}$ est bien une série de Dirichlet à coefficients ds $\mathbb{N}$ par opérations.

④ Supposons alors que $\exists\, \chi \in \hat{G} \setminus \{1_D\}$ tq $L(\chi, 1) = 0$

Par opérations, $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ puis le zéro de $L(\chi, s)$ compense le pôle simple de $L(1_D, s)$

Or $F$ est à coefficients positifs donc par le th de Landau, $-\infty = \sigma_{abs} = \sigma_{conv}$.

En $s = 0$, $\sum_{n \geq 1} a_n$ CV puis $a_n \to 0$ puis $a_n$ nulle APCR car $a_n \in \mathbb{N}$

Or $\forall p \in \mathbb{P}$, le coef de $\frac{1}{p^{d_p}}$ est $h_p \neq 0$ : $(a_n)$ non nulle le long d'une s/s suite ↯

---

Th de la progression arithmétique : Soient $a, D \in \mathbb{N}^*$, $D \geq 2$ tq $a \wedge D = 1$, il y a une infinité de nombres premiers de la forme $p = a + nD$, $n \in \mathbb{N}$.

---

Démonstration : On considère
$$1_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\quad n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv a\ [D] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'agit de mq : $|\{p \in \mathbb{P} : 1_a(p) = 1\}| = +\infty$.

On considère la série de Dirichlet définie $\forall s \in \Omega_1$ par $F_a(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1_a(p)}{p^s}$.

Par orthonormalité des caractères, $\forall p \in \mathbb{P}$, $1_a(p) = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(a)} \cdot \chi(p)$

donc $\forall s \in \Omega_1$, $F_a(s) = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(a)} \cdot \sum_{p \nmid D} \frac{\chi(p)}{p^s}$

Or $\forall p \in \mathbb{P}, \forall s \in \Omega_1$, $\left|\frac{\chi(p)}{p^s}\right| \leq \frac{1}{2}$ et $\forall z \in D(0, \frac{1}{2})$, $|z + \log(1-z)| \leq |z|^2$

d'où $\left|\sum_{p \nmid D} \frac{\chi(p)}{p^s} + \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right| \leq \sum_{p \nmid D} \frac{1}{p^{2\mathrm{Re}(s)}} \leq \zeta(2)$.

On note $\log L(\chi, \cdot) : s \mapsto -\sum_{p \nmid D} \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)$ continue sur $]1, +\infty[$ par restriction

D'après la majoration, $\exists M > 0, \forall s \in \Omega_1$, $\left|F_a(s) - \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(a)} \cdot \log L(\chi, s)\right| \leq M$

Pour $\chi \neq 1_D$, 1 n'est pas un zéro de $L(\chi, s)$.

Par continuité de $\log L(\chi, \cdot)$, on a $\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \sum_{\chi \in \hat{G} \setminus \{1_D\}} \overline{\chi(a)} \cdot \log(L(\chi, s)) \underset{s \to 1}{=} o(1)$

Tandis que, si $\chi = 1_D$, $\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \overline{1} \cdot \log(L(1_D, s)) \xrightarrow[s \to 1]{} +\infty$

d'où $\lim_{s \to 1^+} F_a(s) = +\infty$

Par convergence monotone, $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1_a(p)}{p} = +\infty$.

La famille n'étant pas sommable, on a $|\{p \in \mathbb{P} : 1_a(p) = 1\}| = +\infty$.